

ДОДАТОК

ФРАКТАЛЬНІ СТРУКТУРИ, ЇХ РОЗМІРНІСТЬ. СТОХАСТИЧНИЙ РЕЗОНАНС У БІСТАБІЛЬНІЙ СИСТЕМІ

Розглянемо бістабільний передемпфований осцилятор. «Передемпфований» означає, що коефіцієнт тертя набагато більший за власну частоту осцилятора. У безрозмірних одиницях рівняння руху такого осцилятора за наявності шуму описується рівнянням:

$$\frac{dX}{dt} = X - X^3 + A \cos \Omega t + \xi(t). \quad (Д1)$$

Рівняння (Д1) описує рух частинки в потенціалі $V(X) = -X^2/2 + X^4/4$ під дією періодичної сили $f(t) = A \cos \Omega t$ та білого шуму. Залежність потенціалу $V(X)$ та імовірності $P(X)$ у разі відсутності зовнішньої періодичної сили наведено на рис. 8.2. Згідно з підрозділом 8.8 рівняння (Д1) еквівалентне такому рівнянню Фоккера—Планка для густини імовірності $P(X, t)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} \left((X - X^3 + A \cos \Omega t) P \right) + Q \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \quad (Д2)$$

За наявності періодичної сили розв'язок рівняння (Д2) $P(X, t)$ може бути представлений у вигляді суми періодичних функцій з різними гармоніками. Середнє значення координати визначається формулою

$$\langle X(t) \rangle = \int X P(X, t) dX = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(in(\Omega t)) \quad (Д3)$$

Коефіцієнти X_n визначаються з розв'язку рівняння (Д2) і залежать від інтенсивності шуму, частоти сигналу Ω , та його амплітуди A . Для бістабільного осцилятора з симетричними ямами $X_0 = 0$. При слабких сигналах у (Д3) максимальними є доданки з частотою $\Omega (n = \pm 1)$. Коефіцієнтом підсилення сигналу на частоті Ω називають величину

$$\eta = \left(\frac{2|X_1|}{A} \right)^2. \quad (D4)$$

Розглянемо розв'язок рівняння (D2) у випадку лінійного відносно амплітуди сигналу наближення. Рух частинки складається з руху цієї частинки всередині певної ями та переходу між ямами. Використаємо наближення, яке часто реалізується в реальних системах, а саме: встановлення рівноваги всередині ями відбувається набагато швидше, ніж переходи між ямами і ніж період коливання зовнішньої сили. У цьому разі стан частинки визначається ямою, в якій частинка в даний момент знаходиться, а задача зводиться до дослідження динаміки переходу частинки між двома станами (ямами) за наявності зовнішньої періодичної сили. Середнє значення координати частинки під час її руху в певній ямі визначається положенням мінімуму для даної ями. Отже, ми можемо вважати, що стан системи набуває два дискретних значення $X(t) = \pm X_m$ (для системи, що описується рівнянням (D1), $X_m = 1$). Позначимо імовірність перебування системи в певному стані через $n_{\pm}(t)$, імовірність переходу системи із стану $X = X_m$ у стан $X = -X_m$ через $W_+(t)$, зворотного переходу — через $W_-(t)$. Кінетичне рівняння для імовірності заселення станів має вигляд:

$$\frac{dn_{\pm}}{dt} = -W_{\pm}(t)n_{\pm} + W_{\mp}(t)n_{\mp} \quad (D5)$$

При цьому виконується умова $n_+ + n_- = 1$.

Для отримання імовірності переходу в розглядуваному випадку, коли час релаксації всередині ями набагато менший за період коливань зовнішньої сили, можна вважати, що переходи відбуваються при фіксованому значенні і в потенціалі, а саме:

$$V(X) = -\frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4} + XA \cos \Omega t \quad (D6)$$

Згідно з формулою (8.130) для імовірності переходу між ямами маємо

$$W_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi} (|V(X_{\max})| |V(X_{\min\pm})|)^{1/2} \exp\left(-\frac{V(X_{\max}) - V(X_{\min\pm})}{Q}\right), \quad (Д7)$$

де X_{\max} і X_{\min} – положення максимуму і мінімуму потенціалу (Д6).

Для випадку малих амплітуд зовнішнього поля із співвідношення (Д6), (Д7) отримаємо

$$W_{\pm}(t) = W \exp\left(\pm \frac{X_m A \cos \Omega t}{Q}\right) \approx W (1 \pm X_m A \cos \Omega t), \quad (Д8)$$

де W – імовірність переходу між ямами у разі відсутності зовнішньої сили. Для потенціалу (Д6) при $A = 0$

$$W = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{4Q}\right). \quad (Д9)$$

Враховуючи співвідношення (Д8), рівняння для імовірності заселення стану можна представити у вигляді

$$\frac{dn_{\pm}}{dt} = -2Wn_{\pm} + W - \frac{X_m A}{Q} \cos \Omega t. \quad (Д10)$$

Розв'язуючи рівняння (Д10) з початковими умовами, за яких система перебуває в стані X_0 ($X_0 = \pm X_m$) при $t = t_0$, дістанемо

$$\begin{aligned} n_{\pm}(t|X_0, t_0) = & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2X_m A}{Q(\Omega^2 + 4W^2)^{1/2}} \cos(\Omega t + \varphi) \right) + \\ & + \left(\delta_{X_0, X_m} - \frac{1}{2} - \frac{X_m A}{Q(\Omega^2 + 4W^2)^{1/2}} \cos(\Omega t_0 + \varphi) \right) \exp(-2W(t - t_0)), \end{aligned} \quad (Д11)$$

де $\varphi = -\arctg(\Omega/(2W))$.

З розв'язку (Д11) видно, що за відсутності зовнішніх сил при $t \rightarrow \infty$ величина n_{\pm} набуває значення $1/2$, що відповідає рівномірному розподілу імовірності перебування частинки між ямами. Встановлення рівномірного розподілу відбувається за експоненційним законом з показником експоненти,

що дорівнює $2W$. Ця величина і характеризує порядок величини часу, який частинка знаходиться в певній ямі.

Умовна імовірність для даної системи з двома станами визначається за формулою

$$P(X, t | X_0, t_0) = n_+(t | X_0, t_0) \delta(X - X_m) + n_-(t | X_0, t_0) \delta(X + X_m). \quad (\text{Д12})$$

Середнє значення координати становить

$$\langle X(t) | X_0, t_0 \rangle = \int X P(X, t | X_0, t_0) dX. \quad (\text{Д13})$$

Враховуючи (Д12), маємо

$$\langle X(t) | X_0, t_0 \rangle = X_m (2n_+(t | X_0, t_0) - 1). \quad (\text{Д14})$$

Використавши (Д11), визначимо середнє значення координати при $t \rightarrow \infty$

$$\langle X(t) \rangle = \langle X(t) | X_0, t_0 \rangle_{t \rightarrow \infty} = \frac{2WX_m A}{Q(4W^2 + \Omega^2)^{1/2}} \cos(\Omega t + \varphi). \quad (\text{Д15})$$

З (Д14) та (Д15) отримаємо значення коефіцієнта підсилення

$$\eta = \frac{2W^2 X_m^4}{Q^2 (4W^2 + \Omega^2)}. \quad (\text{Д16})$$

У формулі (Д16) величина W залежить від інтенсивності шуму Q за формулою (Д9). Функція (Д16) як функція інтенсивності шуму має максимум в області значень, при яких період коливань зовнішньої сили становить порядок часу перебування частинки в ямі. Наявність цього максимуму пояснює виникнення назви явища «стохастичний резонанс». Величина максимуму (коефіцієнту підсилення) зростає зі зменшенням частоти зовнішньої сили.

У подібний спосіб визначається автокореляційна функція

$$\langle X(t + \tau) X(t) | X_0, t_0 \rangle = \iint X Y P(X, t + \tau | Y, t) P(Y, t | X_0, t_0) dX dY. \quad (\text{Д17})$$

Використавши (Д11), (Д12) за формулою (9.3), отримаємо спектр автокореляційної функції

$$g(\omega) = g_0(\omega) + \frac{\pi}{2} g_1(\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)), \quad (D18)$$

де

$$g_0(\omega) = \frac{4WX_m^2}{4W^2 + \omega^2} \left(1 - \frac{g_1}{2X_m^2} \right), \quad g_1 = \eta A^2. \quad (D19)$$

Відношення сигнал–шум (SNR) визначається як відношення спектральної густини сигналу до шуму на частоті сигналу. Для розглядуваної моделі двох станів з (D18), (D19) маємо

$$SNR = \pi \left(\frac{AX_m}{Q} \right)^2 W. \quad (D20)$$

Ця функція має єдиний максимум при $Q = 1/4$.

Очевидно, розглядуване явище не є резонанс у традиційному розумінні. З формули для коефіцієнта підсилення (D16) видно, що він немонотонно залежить від інтенсивності шуму. Досліджувану систему можна розглядати як деякий фільтр, що характеризується певним відгуком системи на дію зовнішньої періодичної сили. Ця залежність не є монотонною і дає можливість керувати сигналом, що пройшов, змінюючи інтенсивність шуму. Тому в огляді [118] автор рекомендує називати явище стохастичною фільтрацією.

Ефект стохастичного резонансу використовується для пояснення багатьох фізичних і хімічних процесів. Він виявлений і досліджений в багатьох бістабільних системах: у тунельному діоді, у напівпровідникових квантових інтерферометрах, у магнітних системах, у хімічних системах та ін. Цікавими є використання стохастичного резонансу біологічними об'єктами для оптимального виявлення корисної інформації. Аналіз результатів і список літератури щодо явища стохастичного резонансу наведені в огляді [117].